BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Я.А.ШАРИФОВ, С.А.ЗАМАНОВА

Бакинский Государственный Университет

sharifov22@rambler.ru

В работе изучено обыкновенное дифференциальное уравнение с нелокальными краевыми условиями. При известности приближенного решения доказана теорема существования и единственности точного решения.

1. Введение. Пусть $I=[t_0, T]$- конечный отрезок числовой оси, E_n – n-мерное евклидовое пространство. Норму в этом пространстве будем обозначать $\|\cdot\|$. Для непрерывных вектор - функций, определенных на отрезке I, норму определим следующим образом

$$\| f \|_n = \max_{t\in I}\| f(t) \|.$$

Так как норма вектор - функций определена, то соответствующим образом определяется и норма матрицы.

В настоящей работе изучается существование и единственность решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),\ t\in I=[t_0,T], \tag{1.1}$$

при нелокальных краевых условиях

$$Ax(t_0)+\int_I n(t)\,x(t)\,dt=l. \tag{1.2}$$

Здесь $f(x,t)$-заданная n – мерная вектор – функция, определенная в области $D=E_n\times I$, $x-n$ - мерный вектор; A и $n(t)$- заданные матрицы размерности $n\times n$, l - заданный вектор.

Заметим, что краевая задача (1.1), (1.2) охватывает, в частности, следующие частные случаи:

- при $A=E$ (E - единичная матрица), $n(t)=0$, имеем задачу Коши;

при $A=0$ получается дифференциальное уравнение с интегральным условием.

Многие задачи физики, техники и прикладной математики описываются дифференциальными уравнениями при нелокальных краевых условиях. В настоящее время к изучению таких задач посвящены многочисленные работы [1-3].

В этой работе докажем теорему, которая дает достаточное условие для существования и единственности решения краевой задачи (1.1), (1.2) при известности приближенного решения. Отметим, что приближенные решения краевой задачи (1.1), (1.2) могут быть найдены различными способами: численно-аналитическим методом , методом редукции [4] и т.д.

2. Краевая задача для линейных систем

Лемма 1. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \tag{2.1}$$

заданная система линейных дифференциальных уравнений, где $A(t)$ - непрерывная матрица-функция, определенная на $I = [t_0, T]$, а $\varphi(t)$ - непрерывная вектор-функция на I.

Пусть $\Phi(t)$- фундаментальная матрица соответствующей однородной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad , \tag{2.2}$$

для которой $\Phi(t_0) = E$ (E – единичная матрица). Если матрица

$$G = \left[A + \int_I n(t)\Phi(t)dt \right] \tag{2.3}$$

невырожденная, то система (2.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее граничному условию

$$Ax(t_0) + \int_I n(t)x(t)dt = l\,. \tag{2.4}$$

Для любого l это решение определяется формулой

$$x(t) = \Phi(t)G^{-1}l + \int_I K(t,s)\varphi(s)ds\,, \tag{2.5}$$

где $K(t,s)$ - непрерывная матрица, определяемая соотношением:

$$K(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)\left\{ E - G^{-1}\left[\int_s^T n(t)\Phi(t)dt \right] \right\}\Phi^{-1}(s) \ \ npu\ s < t \\ -\Phi(t)G^{-1}\left[\int_s^T n(t)\Phi(t)dt \right]\Phi^{-1}(s) \ \ npu\ s \geq t \end{cases} \tag{2.6}$$

Доказательство. Согласно формуле Коши, любое решение системы (2.1) представляется в виде [5]:

$$x(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\varphi(s)ds\,, \tag{2.7}$$

где C – произвольный постоянный вектор.

Удовлетворим краевые условия (2.4). Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$GC = l - \int_I \left[\int_s^T n(t)\Phi(t)dt \right]\Phi^{-1}(s)\varphi(s)\,ds\,. \tag{2.8}$$

Так как, согласно предположению, $\det G \neq 0$,то из равенства (2.8) имеем:

$$C = G^{-1}l - G^{-1}\int_I \left[\int_s^T n(t)\Phi(t)dt\right]\Phi^{-1}(s)\varphi(s)ds. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9) в (2.7), получаем (2.5). Лемма доказана.

Лемма 2. Функция

$$\psi(t) = \int_I K(t,s)\varphi(s)ds \tag{2.10}$$

является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = A(t)\psi(t) + \varphi(t), \tag{2.11}$$

$$A\psi(t_0) + \int_I n(t)\psi(t)dt = 0 \tag{2.12}$$

Доказательство. Учитывая (2.6) в (2.10), имеем:

$$\psi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\varphi(s)ds - \Phi(t)G^{-1}\int_I \left[\int_s^T n(t)\Phi(t)dt\right]\Phi^{-1}(s)\varphi(s)ds.$$

Отсюда, дифференцируя обе части равенства, получаем (2.11) и (2.12). Лемма доказана.

Замечание 1. Из (2.10) видно, что функция $\psi(t)$ непрерывна на отрезке I и определяет линейный интегральный оператор K в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке I. Так как матрица $K(t,x)$ зависит только от матрицы $\Phi(t)$, а матрица $\Phi(t)$ зависит только от матрицы $A(t)$, то линейный интегральный оператор (2.10) будем называть отображением, соответствующим матрице $A(t)$.

3. Основная теорема

Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица линейной однородной системы дифференциальных уравнений (2.2), удовлетворяющая начальному условию $\Phi(t_0) = E$. Через $\Psi(x,t)$ обозначим якобиан вектор функции $f(x,t)$ относительно x. Предположим выполнение следующих условий:

I. Существуют положительные постоянные M_1 и $0 \le m < 1$, такие, что

$$\|K\|_n \le M_1, \tag{3.1}$$

$$\|\Psi(x,t) - A(t)\|_n \le \frac{m}{M_1} \tag{3.2}$$

для всех $(t,x) \in D_\delta$, где

$$D_\delta = \{(t,x) \mid \|x - \bar{x}(t)\| \le \delta,\ t \in I\} \subset D \tag{3.3}$$

и $\delta > 0$ - некоторое постоянное, а $x = \bar{x}(t)$ - приближенное решение краевой задачи (1.1), (1.2).

II. Существует постоянное $M_2 > 0$, такое, что

$$\|\Phi(t)G^{-1}\| \le M_2 \text{ для } t \in I. \tag{3.4}$$

III. Существует постоянное $r \ge 0$, такое, что

$$\left\| \frac{d\overline{x}}{dt} - f(\overline{x}(t),t) \right\| \le r . \tag{3.5}$$

IV. Существует постоянное $\varepsilon \ge 0$, такое, что

$$\left\| A\overline{x}(t_0) + \int_I n(t)\overline{x}(t)d - l \right\| \le \varepsilon . \tag{3.6.}$$

Теорема. Пусть выполняются условия I-IV. Кроме того ,

$$\frac{M_1 r + M_2 \varepsilon}{1-m} \le \delta . \tag{3.7}$$

Тогда краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и имеет место оценка

$$\left\| x^*(t) - \overline{x}(t) \right\|_n \le \frac{M_1 r + M_2 \varepsilon}{1-m} . \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = f(\overline{x}(t),t) + \eta(t). \tag{3.9}$$

Тогда (3.9) можно переписать в виде

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + \left[f(\overline{x}(t),t) - A(t)\overline{x}(t) + \eta(t) \right]. \tag{3.10}$$

Теперь положим

$$A\overline{x}(t_0) + \int_I n(t)\overline{x}(t)dt = l' . \tag{3.11}$$

Согласно лемме 1 решение (3.10), (3.11) можно представить в виде:

$$\overline{x}(t) = \Phi(t)G^{-1}l' + \int_I K(t,s)\left[f(\overline{x}(s),s) - A(s)\overline{x}(s) + \eta(s) \right] ds . \tag{3.12}$$

Построим последовательные приближения по формуле:

$$x_{k+1}(t) = \Phi(t)G^{-1}l + \int_I K(t,s)\{ f(x_k(s),s) - A(s)x_k(s)\} ds, \quad k = 0,1,2..., \tag{3.13}$$

где $x_0(t) = \overline{x}(t)$.

Методом математической индукции покажем, что для последовательных приближений на отрезке I справедливы оценки :

$$\left\| x_{k+1} - x_k \right\|_n \le m^k \left\| x_1 - x_0 \right\|_n , \tag{3.14}$$

$$\left\| x_{k+1} - x_0 \right\| \le \delta \quad (k = 0,1,2...). \tag{3.15}$$

Действительно, при $k = 0$ (3.14) очевидно. Так как

$$x(t) - x_0(t) = \Phi(t)G^{-1}(l - l') - \int_I K(t,s)\eta(s)ds,$$

то из условий I-IV следует, что

$$\left\| x_1 - x_0 \right\|_n \le M_2 \varepsilon + M_1 r . \tag{3.16}$$

Отсюда, учитывая (3.7), имеем:

$$\left\| x_1 - x_0 \right\| \le (1-m)\delta < \delta . \tag{3.17}$$

Это показывает справедливость (3.15) при $k = 0$. Теперь предположим,

что оценки (3.14) и (3.15) справедливы для $k-1$. Тогда из (3.16) имеем:
$$x_{k+1}-x_k(t)=\int_I K(t,s)[f(x_k(s),s)-f(x_{k-1}(s),s)-A(s)[x_{k-1}(s)-x_{k-1}(s)]]ds.$$

Тогда, согласно (3.1), получим:
$$\|x_{k+1}-x_k\|_n \le M_1\cdot\|f(x_k(s),s)-f(x_{k-1}(s),s)-A(s)[x_k(s)-x_{k-1}(s)]\|_n. \quad (3.18)$$

Далее, так как, по предположению $\|x_k-x_0\|_n\le\delta$, то
$$f(x_k(s),s)-f(x_{k-1}(s),s)-A(s)[x_k(s)-x_{k-1}(s)]=$$
$$=\int_0^1\Psi\{x_{k-1}(s)+\theta(x_k(s)-x_{k-1}(s))s-A(s)[x_k(s)-x_{k-1}(s)]\}d\theta$$

и
$$\|[x_{k-1}(s)+\theta(x_k(s)-x_{k-1}(s))]-x_0(s)\|\le\delta,\quad 0\le\theta\le 1.$$

Поэтому из (3.2) следует:
$$\|f(x_k(s),s)-f(x_{k-1}(s),s)-A(s)[x_k(s)-x_{k-1}(s)]\|\le\frac{m}{M_1}\|x_k-x_{k-1}\|_n.$$

Таким образом, из (3.18) получаем:
$$\|x_{k+1}-x_k\|_n\le m\|x_k-x_{k-1}\|_n, \quad (3.19)$$

что означает
$$\|x_{k+1}-x_k\|_n\le m^k\|x_1-x_0\|_n.$$

Таким образом,(3.14) доказано.

Теперь, учитывая, что
$$\|x_{k+1}-x_0\|_n\le\|x_{k+1}-x_k\|_n+\|x_k-x_{k-1}\|_n+\ldots+\|x_1-x_0\|_n,$$

получаем:
$$\|x_{k+1}-x_0\|_n\le(m^k+m^{k-1}+\ldots+m+1)\|x_1-x_0\|_n\le\frac{M_1r+M_2\varepsilon}{1-m}\le\delta. \quad (3.20)$$

Оценка (3.15) доказана.

Из оценок (3.14) и (3.15) следует, что функциональная последовательность, определяемая равенством (3.13), равномерно сходится на отрезке I.

Положим
$$\lim_{k\to\infty}x_k(t)=x^*(t).$$

Тогда $x^*(t)$ также является непрерывным на I и из оценки (3.15) следует, что
$$\|x^*(t)-x_0(t)\|\le\delta.$$

Для предельной функции, учитывая (3.13), имеем:
$$x^*(t)-\Phi(t)G^{-1}l-\int_I K(t,s)[f(x^*(s),s)-A(s)x^*(s)]ds=$$
$$=x^*(t)-x_{k+1}+\int_I K(t,s)[f(x_k(s),s)-A(s)x_k(s)]ds-$$

$$-\int_I K(t,s)\left[f\left(x^*(s),s\right)-A(s)x^*(s)\right]ds.$$

Отсюда, аналогично (3.19), получаем :

$$\left\|x^*(t)-\Phi(t)G^{-1}l-\int_I K(t,s)\left[f\left(x^*(s),s\right)-A(s)s^*(s)\right]ds\right\|_n \le$$

$$\le \left\|x^*-x_{k+1}\right\|_n+m\left\|x_k-x^*\right\|_n.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем:

$$x^*(t)=\Phi(t)G^{-1}l+\int_I K(t,s)\left[f\left(x^*(s),s\right)-A(s)x^*(s)\right]ds. \qquad (3.21)$$

Согласно лемме 1, отсюда получаем, что $x^*(t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=A(t)x^*(t)+\left[f\left(x^*(t),t\right)-A(t)x^*(t)\right],$$

$$Ax^*(t_0)+\int_I n(t)x^*(t)dt=l.$$

Это означает, что функция $x^*(t)$ является решением краевой задачи (1.1), (1.2). А оценка (3.8) получается из (3.20).

Теперь покажем, что решение краевой задачи (1.1), (1.2) единственно. Предположим обратное. Пусть краевая задача (1.1), (1.2) кроме решения $x^*(t)$ имеет и решение $x^{**}(t)$. Тогда:

$$\frac{dx^{**}(t)}{dt}=f\left(x^{**}(t),t\right)=A(t)x^{**}(t)+\left[f\left(x^{**}(t),t\right)-A(t)x^{**}(t)\right].$$

Отсюда имеем:

$$x^{**}(t)=\Phi(t)G^{-1}l+\int_I K(t,s)\left[f\left(x^{**}(s),s\right)-A(s)x^{**}(s)\right]ds.$$

Сравнивая последнее с (3.21), аналогично (3.19), имеем:

$$\left\|x^*-x^{**}\right\|_n\le m\left\|x^*-x^{**}\right\|_n.$$

Так как , $0\le m<1$,то из последнего соотношения следует, что

$$\left\|x^*-x^{**}\right\|=0,$$

что означает единственность решений краевой задачи (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Замечание 2. Из условий (3.2), (3.3) видно, что матрица $A(t)$ должна быть достаточно близкой к матрице $\Psi\left(\overline{x}(t),t\right)$.

Замечание 3. Условия (3.2), (3.3) и (3.7) вместе определяют точность приближенного решения. Действительно, если $x=\overline{x}(t)$-точное решение, то из (3.5) и (3.6) вытекает, что параметры r и ε можно взять достаточно малыми и в силу того, что $0\le m<1$, условие (3.7) будет выполняться автоматически. В этом смысле условия (3.2), (3.3) и (3.7) определяют близость приближенного решения к точному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen S., Hu J., Chen L., C.Wang. Existence results for n-point boundary value problem of second order ordinary differential equations// Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, v.180, № 2, p.425-432.
2. Liu X. Nontrivial solutions of singular nonlinear m-point boundary value problems// Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, v.284, №2, p.576-590.
3. Zang Z., Wang J. On existence and multiplicity of positive solutions to singular multi-point boundary value problems//Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, v. 295, №2, p.502-512.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Науково Думка, 1988, 219 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.

BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN VARLIQ VƏ YEGANƏLİK TEOREMİ

Y.Ə.ŞƏRİFOV, S.A.ZAMANOVA

XÜLASƏ

İşdə qeyri-xətti adi diferensial tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd məsələsi öyrənilmişdir. Təqribi həllin varlığı şərti daxilində dəqiq həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərt verən teorem isbat olunmuşdur.

EXISTECE AND UNIQUENESS THEOREM FOR A NONLOCAL INITIAL-BOUNDARY PROBLEM

Y.A.SHARIFOV, S.A.ZAMANOVA

SUMMARY

The present paper deals with the nonlocal boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations. We prove a theorem that gives a sufficient condition under which the existence of the approximate solution insures the existence and uniqueness of the exact solution.